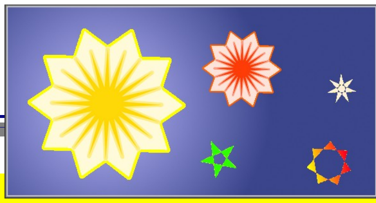
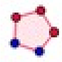
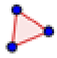
Des étoiles pour Noël avec GeoGebra



OBJECTIF : apprendre à GeoGebra à dessiner automatiquement des étoiles. Utiliser ces nouveaux outils pour créer une belle figure, éventuellement animée.

1) De nouveaux outils pour créer des étoiles à partir de polygones réguliers convexes.

Dans une nouvelle fenêtre (munie d'un repère orthonormé, sans axes visibles), avec le bouton  « Polygone régulier », créer un polygone régulier convexe à 11 côtés. Il s'appelle ABCDEFGHIJK et porte le nom « poly1 » dans GeoGebra. Tracer ensuite, avec le bouton  « Polygone » le polygone ADGJBEHKCFI (on passe deux sommets avant de relier). Il est nommé poly2 par GeoGebra.

Sélectionner « Créer un nouvel outil » dans le menu « Outils ». Choisir « poly2 » dans l'onglet « Objets finaux ». L'onglet « Objets initiaux » devra contenir A et B. Compléter le dernier onglet sans chercher à créer une nouvelle icône.Vérifier que la case « Visible dans la barre d'outils est bien cochée ». L'aide peut comporter un texte du genre : « Cliquer sur deux points pour dessiner une étoile à 11 pointes. » Cliquer sur « Fin ». Ce nouvel outil apparaît en dernière position de la barre de boutons. Vérifier qu'il fonctionne.

Pour le sauvegarder, aller dans le menu « Outils-Gérer les outils » et cliquer sur « Sauvegarder sous ». Les outils GeoGebra ont l'extension « ggt »et peuvent être chargés dans tout fichier par un glisser-déposer ou par le menu « Fichier-Ouvrir ». Le dessin **en cours ne sera alors pas effacé**.

Avec le premier dessin, il est possible de créer une étoile à 11 pointes plus pointue : AFKEJDICHBG (on passe 4 sommets avant de relier). Un nouvel outil peut alors être créé.

Sur ce principe il est facile de fabriquer de nouveaux outils qui dessinent des étoiles avec un autre nombre de sommets. Essayons toutefois de généraliser cette construction.

2) Un outil beaucoup plus général

L'idée est de créer, à partir du paragraphe précédent, une étoile en cliquant sur deux points (son centre et un sommet), puis en indiquant le nombre de sommets et le nombre de sommets à passer sur le polygone régulier convexe correspondant. Pour cela, nous partirons de points régulièrement espacés sur un cercle.

a) Des points régulièrement espacés sur un cercle (paragraphe qu'on peut aussi retrouver dans l'activité « Jeux de cercles »)

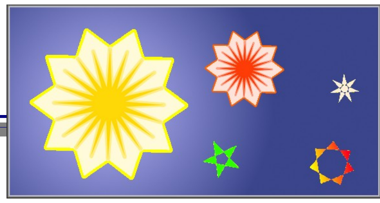
On donne deux points O et A. Tracer le cercle de centre O, passant par A. **L'objectif est de placer 11 points, puis n points, régulièrement espacés sur ce cercle**. Commencer par construire l'image A' de A par la rotation (bouton rotation ) de centre O et d'angle 360°/11 (puisque si [AA'] est un côté d'un polygone régulier convexe de centre 0 à n côtés, alors $\widehat{AOA'} = 360°/n$). Observer la syntaxe de la commande correspondante dans la fenêtre « Algèbre » (Options-Descriptions-Commande). Il suffirait de répéter cette construction pour obtenir les points demandés, mais GeoGebra permet de dessiner avec une seule commande (« Séquence ») les 11 points à construire (A est l'un des 11 points et sera aussi construit par cette instruction). Pour cela, taper dans la barre de saisie :

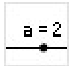
LPoints = Séquence[Rotation[A, k*360°/11, O], k, 0, 10, 1]. Au moment où « Séqu » est écrit, une liste de commande apparaît, choisir « Séquence[<Expression>, <Variable>, <de>, <à>, <pas>] ». Le champ « <Expression> » est en vidéo inverse, il est sélectionné et il possible de le remplacer immédiatement (sans l'effacer) par « Rotation[A, k*360°/11, O] ». La touche de tabulation permet de sélectionner les autres champs, ce qui permet de compléter rapidement toute commande.

Voici un extrait de l'aide officielle de GeoGebra pour comprendre la commande « Séquence » :

Séquence[<Expression e>, <Variable k>, <de a>, <à b>, <pas p>]

Liste des objets créés en utilisant l'expression *e* et l'indice *k* variant du nombre *a* au nombre *b* avec le pas *p*.



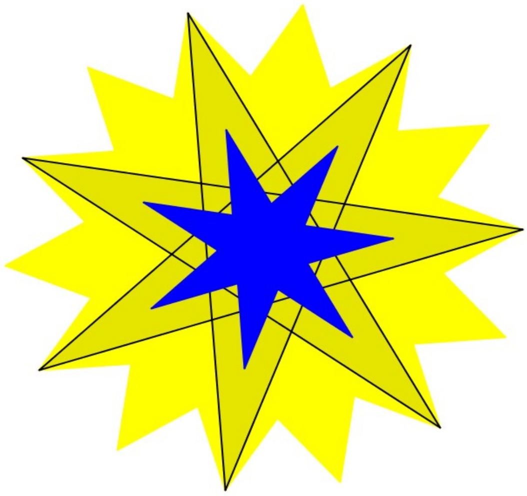
- Supprimer le point A'. Cela ne va pas affecter le dessin puisque A' est aussi à l'emplacement du deuxième point créé avec la commande « Séquence ».
- Il est possible de cacher A (par exemple en cliquant sur la puce qui se trouve devant A dans la fenêtre « Algèbre ») puisque ce point est aussi le premier de la liste « LPoints ».
- Lorsque le pas est égal à 1, il n'est pas utile de l'indiquer dans la commande « Séquence ».
- Modifier la liste « LPoints » de façon à obtenir 19 points régulièrement répartis sur le cercle. Pour modifier un objet, il est possible de faire un clic du bouton droit sur cet objet (ou son nom) et d'éditer la fenêtre des propriétés.
- Pour obtenir n points (n entier supérieur ou égal à 1) régulièrement répartis sur le cercle, définir le nombre n sous forme de curseur (pour créer un curseur, sélectionner le bouton , cliquer dans la fenêtre de dessin et choisir dans la boîte de dialogue : entier entre 1 et 20 avec un pas de 1) puis modifier la liste « ListePoints » en conséquence. Changer la valeur du curseur pour tester la construction. Chercher vraiment avant de regarder une solution qui figure plus loin. Le cercle initial peut être caché ou détruit. Sauvegarder ce dessin.
- Le cercle initial peut être caché ou détruit. Sauvegarder

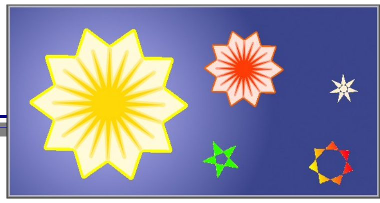
b) Construction d'étoiles

Écrire dans la barre de saisie : Polygone[LPoints]. Après validation, un polygone régulier convexe à n côtés apparaît. Changer la valeur du curseur n. Choisir 11 comme valeur n pour la suite. Pour dessiner une étoile à 11 pointes en suivant l'idée du premier paragraphe, il faut joindre ces onze sommets en passant des points. Plusieurs solutions sont envisageables. En voici une : multiplier l'angle de la rotation de la commande « Séquence » précédente par 2, 3 ou 4. Les points seront répartis sur le cercle en faisant 2, 3 ou 4 tours. Il reste juste à créer un curseur t qui sera ce coefficient multiplicatif de l'angle, ou nombre de tours effectués, et à l'introduire dans la commande « Séquence ». Créer un nouvel outil pour obtenir de telles étoiles ne devrait pas poser de problème. Le faire. L'appeler « Etoilens », le sauvegarder et le tester.

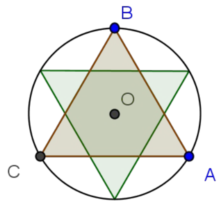
Solution avec n points (paragraphe 2 a)) : Séquence[Rotation[A, (360*k / n)°, O], k, 0, n - 1, 1]. Remarque : k peut aussi varier de 1 à n.

Ce nouvel outil ne permet pas de dessiner des étoiles à 6 pointes par exemple. **Et pour bien prévoir le dessin qui sera obtenu, il peut être utile de s'intéresser à la fraction irréductible égale à d/n.**





3) Des étoiles à partir de triangles équilatéraux.



Avec deux triangles équilatéraux, il est possible de dessiner une étoile à 6 sommets. Après avoir dessiné un triangle équilatéral ABC, nous créerons de nouveaux triangles équilatéraux régulièrement répartis sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
Voici un moyen de réaliser cette figure (le tableau ci-après est la protocole de construction qui peut être affiché pour vérification) :
La valeur 2 pour n permet de dessiner une étoile à 6 pointes.

No.	Nom	Icône de Barr...	Définition	Commande
1	Nombre n	a = 2		
2	Point A			
3	Point B			
4	Triangle poly1		Polygone[A, B, 3]	Polygone[A, B, 3]
4	Point C		Polygone[A, B, 3]	Polygone[A, B, 3]
4	Segment c		Segment [AB] de Triangle poly1	Segment[A, B, poly1]
4	Segment a		Segment [BC] de Triangle poly1	Segment[B, C, poly1]
4	Segment b		Segment [CA] de Triangle poly1	Segment[C, A, poly1]
5	Cercle d		Cercle passant par A, B, C	Cercle[A, B, C]
6	Point O		Centre de d	Centre[d]
7	Liste Ltriangles		Séquence[Rotation[poly1, (k 120 / n)°, O], k, 1, n]	Séquence[Rotation[poly1, (k 120 / n)°, O], k, 1, n]

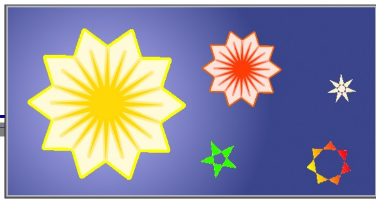
Remarquer que la séquence redessine le premier triangle équilatéral. De ce fait, pour créer un nouvel outil, il suffira de choisir la liste appelée « Ltriangles » comme objet final. À vous de déterminer les objets initiaux.

La figure de base peut être animée simplement : choisir n entier entre 1 et 30 avec un pas de 1. Cliquer avec le bouton droit sur ce curseur et choisir « animer ». Le menu contextuel apparu permet de modifier entre autres la vitesse d'animation. Et de façon générale, quand l'animation est complexe, sa fluidité sera améliorée avec la fermeture de toutes les fenêtres annexes (Algèbre, Tableur, ...)

Il est possible de faire le même travail avec d'autres figures que les triangles, par exemple avec avec des étoiles à 7 pointes (les plus pointues possibles - utiliser l'outil « Etoilens » créé au paragraphe 2).

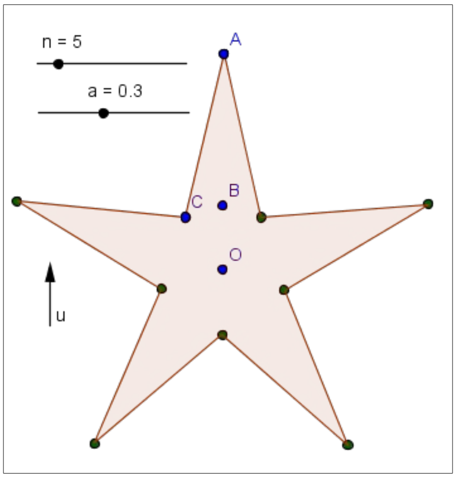
Dans le dernier paragraphe, nous allons fabriquer un outil encore plus général que les précédents pour dessiner beaucoup de sortes d'étoiles. Ensuite, avec tous ces outils, vous chercherez à créer un dessin artistique qui pourra même être animé.

Des étoiles pour Noël avec GeoGebra



4) Danse d'étoiles

Avec les outils précédents, certaines sortes d'étoiles ne peuvent pas être dessinées et les côtés se croisent. Cherchons à construire des étoiles en joignant convenablement des points régulièrement répartis sur deux cercles concentriques. Voici un moyen d'y arriver :



- Créer deux points : O, le centre des cercles et A l'un des sommets de l'étoile.
- Créer deux curseurs : n, entier entre 4 et 30 (pas 1), qui sera le nombre de points par cercle ; et a, variant de 0 à 1 avec un pas de 0,1.
- LPoints1=Séquence[... ....] va permettre de créer n points régulièrement répartis sur le cercle de centre O, de rayon OA, en partant de A.
- Dans la barre de saisie, écrire u=a *Vecteur[O, A]. Un vecteur sera obtenu. Puis créer B, image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$ (bouton , ou syntaxe à trouver dans la barre de saisie).
- Construire C image de B par la rotation de centre O et d'angle 180°/n (résultat de (1/2)*(360°/n)).
- LPoints2=Séquence[... ....] va permettre de créer n points régulièrement répartis sur le cercle de centre O, de rayon OB ou OC, en partant de C.
- Maintenant, nous allons créer une nouvelle liste qui prend alternativement un point de chacune des deux listes précédemment créées. Voici une possibilité : LSommets=Séquence[Si[Reste[k,2]==0, Elément[LPoints1, k/2], Elément[LPoints2, (k-1) / 2]], k, 2, 2*Longueur[LPoints1] + 1].
  Explications provenant de l'aide de GeoGebra :
  Si[<Condition>, <Objet *a*>, <Objet *b*>] retourne une copie de l'objet *a* si la condition prend la valeur *true* (vrai), et une copie de l'objet *b* si elle prend la valeur *false* (faux).
  Reste[<Dividende D>, <Diviseur d>] retourne le nombre entier, reste de la division euclidienne de l'entier *D* par l'entier *d*.
  Elément[<Liste>, <Position n>] retourne le $n^{\text{ème}}$ élément de la liste.
  Longueur[<Liste>] retourne la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de *Liste*
- Il ne reste plus qu'à écrire : Etoile=Polygone[LSommets]. Les listes de points peuvent être cachées.

Faire danser une étoile :

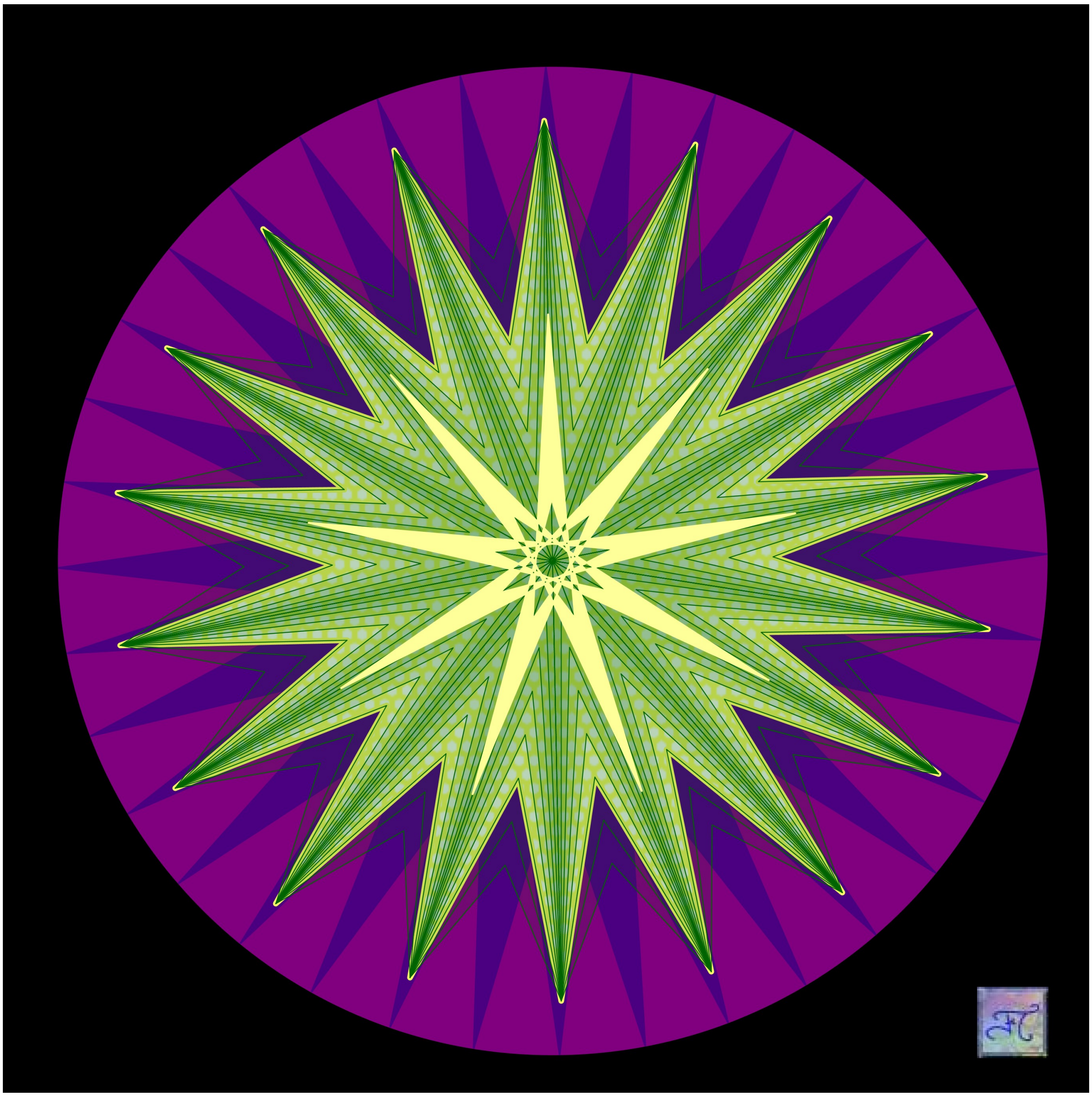
Choisir n=5, a=0,3. Créer un curseur d (comme décalage) variant de -40 à 40 avec un incrément (ou pas) de 2. Ajouter ce nombre (en degrés) à l'angle de la rotation qui se trouve dans la définition de LPoints2. Cela peut être écrit de cette façon : (d + k * 360 / n)°, faire attention à l'emplacement du symbole « degré ». Animer ce curseur (bouton droit). Modifier la vitesse de l'animation et fermer éventuellement la fenêtre « Algèbre ».

On peut placer les étapes précédentes dans une seule instruction (sans créer physiquement les différentes listes de points). Solution plus loin.

Il est maintenant possible de créer un nouvel outil qui dessinera une étoile en fonction des objets initiaux (ou paramètres) O, A, n, a et d.

5) *Créations personnelles*

Utiliser les outils créés pour construire de jolies figures, éventuellement animées. Dans GeoGebra, il est possible d'animer un curseur, un point sur un objet (segment, cercle, courbe ...). Par exemple, le centre O d'une étoile peut être placé sur un cercle, un sommet de cette étoile est l'image de O par une translation. Il est possible d'obtenir l'image de cette étoile par une transformation. L'animation de O mettra ces étoiles en mouvement. La commande « Séquence » peut aussi être utilisée. Voir des exemples sur le site http://geodyne.free.fr



Une solution (paragraphe 4, faire danser une étoile) : Polygone[Séquence[Si[Reste[k, 2] $\stackrel{?}{=}$ 0, Rotation[*A*, (k 180 / n)°, O], Rotation[*C*, (d + (k - 1) (180 / n))°, O]], k, 0, 2n]]. Il est même possible de remplacer *C* par sa définition : Polygone[Séquence[Si[Reste[k, 2] $\stackrel{?}{=}$ 0, Rotation[*A*, (k 180 / n)°, O], Rotation[Rotation[Translation[O, u], (180 / n)°, O], (d + (k - 1) (180 / n))°, O]], k, 0, 2n]]. Cette dernière solution a surtout un intérêt théorique car le calcul de la position de *C* est effectué n fois (un tour sur 2) dans la séquence contrairement à la solution précédente dans laquelle la position de *C* est calculée une seule fois avant de mettre en œuvre la séquence.